

Les matemàtiques de Joan Girbau

L. Bruna, M. Nicolau, A. Reventós
Alumnes de Joan Girbau

El camp principal de recerca de Joan Girbau ha estat la Geometria Diferencial i la Relativitat. El seu llibre de text més conegut es titula justament *Geometria diferencial i relativitat* que, un cop exhaurida l'edició per part de la UAB, es pot consultar ara lliurement a la secció de publicacions electròniques de la SCM.

Varietats complexes

El primer tema sobre el qual Girbau va publicar diversos articles fou el de les varietats kählerianes. Més particularment, sobre la cohomologia d'aquestes varietats a valors en fibrat vectorial holomorf.

Un dels seus resultats més importants en aquesta línia apareix a [1]. Hi publica un teorema que inclou com a casos particulars teoremes d'anul·lació clàssics de Kodaira, d'Akizuki-Nakano i de Vesentini i, per a la seva demostració, Girbau estableix una extensió de l'anomenada desigualtat de Nakano. En el mateix article es dedueix, mitjançant l'isomorfisme de Le Poitier, un teorema d'anul·lació anàleg per a la cohomologia a valors en fibrats holomorfs de rang superior.

TEOREMA: Sigui M una varietat kähleriana compacta. Sigui $\pi: E \rightarrow M$ un fibrat holomorf en rectes. Suposem que $c_1(E) \leq 0$ amb rang k a tot arreu. Llavors

$$H^{p,q}(E) = 0, \quad \text{si } p + q < k.$$

Nombroses obres utilitzen i citen el teorema de Girbau i algunes d'elles donen la seva demostració completa, com el llibre de B. Shiffman i A. J. Sommese, [4], o el llibre de S. Kobayashi [5]. El 1981 G. Gigante va donar una nova demostració del resultat per mètodes diferents.

Foliacions holomorfes

Posteriorment Girbau es va interessar per les varietats complexes foliades, estenent els resultats d'anul·lació de cohomologia a aquest context. Els seus principals resultats en aquest domini estan continguts a l'article [2] en el que dona una demostració correcta d'un resultat

d'anul·lació anunciat per Vaisman (la demostració del qual era insuficient) i en què dedueix un teorema de rigidesa per a una classe de foliacions holomorfes.

Després d'aquest resultat particular el seu objectiu fou desenvolupar una teoria de deformacions per a foliacions holomorfes similar a la teoria de Kodaira-Spencer-Kuranishi de deformacions de varietats complexes. Poc abans, X. Gómez-Mont i de manera independent, T. Duchiamp i M. Kalka, havien demostrat la finitud de la cohomologia de foliacions transversalment holomorfes en varietats compactes. Aquest resultat, fins a cert punt inesperat ja que aquestes estructures barregen l'aspecte holomorf amb el diferenciable, va suggerir de tractar la qüestió de forma unificada per a foliacions holomorfes i transversalment holomorfes. Aquest punt de vista es va revelar molt fructífer i, en col·laboració amb A. Haeffliger i D. Sundararaman, Girbau va resoldre aquest problema de mòduls a l'article [3]. El resultat fonamental es pot enunciar de la següent forma:

TEOREMA: Sigui $\mathcal{F}$ una foliació holomorfa, o transversalment holomorfa, en una varietat compacta M . Hi ha una família versal de deformacions de $\mathcal{F}$ parametritzada per un germen d'espai analític de dimensió finita l'espai tangent del qual és el grup de cohomologia $H^1(M, \theta)$, on θ és el feix de gèrmens de camps holomorfs transversos.

Aquí, versal significa que la família conté totes les petites deformacions de $\mathcal{F}$, és minimal amb aquesta propietat i tota altra família de deformacions de $\mathcal{F}$ s'obté d'aquesta per pull-back. Es tracta per tant d'un teorema de tipus Kuranishi en el context de les foliacions holomorfes o transversalment holomorfes.

Aquest resultat és notable per dos motius. En primer lloc per la seva total generalitat i seguidament pels mètodes utilitzats per aquests autors en la seva demostració. En efecte, el punt clau de la demostració és la construcció d'una sofisticada resolució dels feixos implicats que es basa en les propietats de determinats espais de derivacions de formes diferencials.

Cal assenyalar aquí l'existència de resultats previs sobre la qüestió deguts a Duchamp i Kalka però que resultaven ser vàlids només sota hipòtesis força restrictives i que estaven basats en resolucions dels feixos més intuïtives però insuficients per tractar el cas general.

A continuació, es va interessar en la relació entre els espais de Kuranishi d'una foliació holomorfa quan aquesta es mira des dels dos punts de vista holomorf i transversalment holomorf. Aquesta qüestió va donar lloc a la tesi doctoral de M. Nicolau. Així mateix es va interessar en el problema de mòduls de foliacions holomorfes amb estructura geomètrica transversa, problema que va centrar la tesi doctoral de G. Guasp.



Curs d'Astronomia

Relativitat

Pel que fa a la Relativitat General, Girbau es va interessar per l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en presència de matèria $G(g) = \chi T$. Això el va portar, primer, a formular el problema de Cauchy per a uns certs tensors T d'impulsió-energia i, en segon lloc, a adaptar el concepte d'estabilitat lineal a aquest problema. Aquestes dues contribucions són inèdites en la literatura i van ser l'origen de la tesi que Joan Girbau va dirigir a Lluís Bruna i es poden consultar en un llibre que tots dos varen publicar l'any 2010, [7]. Tot seguit, en donem una breu explicació.

Una equació és estable per linealització quan les solucions de l'equació linealitzada realment serveixen per aproximar les solucions exactes. La definició clàssica que tradueix aquesta idea és la següent: l'equació $f(x) = y_0$, amb y_0 fix, és linealment estable en el punt x_0 si per a tota

solució h de l'equació linealitzada $D_{x_0}f(h) = 0$ existeix una corba $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ de solucions de $f(x) = y_0$ que és tangent a h en x_0 .

En la dècada dels 70 es van publicar molts articles sobre l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en el buit $G(g) = 0$. Històricament, el motiu d'aquest interès era saber si tenia algun sentit linealitzar aquesta equació al voltant de la mètrica η de Minkowski de la Relativitat Especial, solució particular de $G(g) = 0$. La qüestió no era simplement teòrica: en considerar només els termes de primer ordre, s'obté l'equació d'ones que permet postular l'existència de les ones gravitatòries. Y. Choquet-Bruhat, S. Deser, A. Fischer i J.E. Marsden van demostrar que, efectivament, $G(g) = 0$ és estable per linealització en $g = \eta$, segons la definició clàssica.

Joan Girbau es va adonar que en els articles sobre cosmologia de l'any 1917, la manera com Einstein treballava no responia exactament a la forma usual de linealitzar una equació. En aquests escrits Einstein també parteix de $G(\eta) = 0$, però es pregunta per aquelles mètriques g pròximes a la mètrica de Minkowski que compleixen $G(g) = \chi T$ per a un T petit, que podem entendre com una pertorbació de $T = 0$. Aleshores, per simplificar el problema, considera l'equació linealitzada $D_\eta G(h) = \chi T$, ja que en primer ordre $\eta + h$ és solució de $G(g) = \chi T$. D'aquí Einstein obté l'equació d'ones no homogènia, i dona les solucions de l'equació linealitzada en funció dels potencials retardats.

Aquest procediment d'Einstein no respon a l'esquema clàssic de linealitzar una equació del tipus $f(x) = y_0$ amb y_0 fix de la qual sabem una solució particular x_0 , $f(x_0) = y_0$, sinó al cas d'una equació del tipus $f(x) = y_0 + q$ amb q petit però variable, on coneixem una solució particular x_0 de $f(x) = y_0$ (en el cas d'Einstein, $x_0 = \eta$, $y_0 = 0$ i $q = T$). Aquesta nova situació requerirà d'una nova definició d'estabilitat no basada en el concepte de tangència, sinó en poder garantir un acotament de l'error en considerar les solucions de l'equació linealitzada en comptes de les solucions reals. Aquesta nova definició, però, no es pot aplicar directament a l'equació d'Einstein escrita en la forma $G = \chi T$ perquè la condició de conservació de l'energia $\text{div}_g T = 0$ lliga les primeres deformacions de

g i de T . És necessari plantejar un problema de Cauchy on les variables que representen la geometria i l'energia siguin independents. L'equació d'Einstein és de naturalesa hiperbòlica i això implica que les dades de Cauchy han de complir unes equacions de lligam. Si el problema de Cauchy és ben posat, a cada pertorbació de les dades inicials de Cauchy correspon una pertorbació de la solució i per tant l'estabilitat per linealització de les equacions de lligam per a les dades de Cauchy és equivalent a la del sistema format per les equacions $G = \chi T$ i $\operatorname{div}_g T = 0$. Això és precisament el que succeeix en els models de Robertson-Walker, en els quals la matèria ve descrita per un fluid perfecte de tensor $T = (\rho + p)u \otimes u + pg$.

Divulgació

Joan Girbau era un gran professor i molt bon comunicador. Potser per això gaudia dedicant el seu temps a temes de divulgació, pensant, en molts casos, en la joventut. En aquest sentit podem citar “Astronomia per a xicots de 14 anys una mica espavilats”, i “Les matemàtiques i les escales musicals”, publicats al Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Soc. Catalana de Ciències Fís. Quím. i Mat. els anys 1983 i 1985 respectivament. O la seva participació a la taula rodona sobre Art i Matemàtica, celebrada a l'IEC el 19 de desembre de 2000, juntament amb Sebastià Xambó, Oriol Pi de Cabanyes, David Jou i el pintor Salvador Alibau. També va escriure diversos articles sobre rellotges de sol i astronomia, com per exemple “Cicle de Metó i Saros”, publicat a la *SCM/Notícies* el

2002. També és molt remarcable el treball titulat “Un curs accelerat d'acceleració còsmica”, publicat al Butlletí de la SCM [8].

Referències

- [1] J. Girbau, “Sur le théorème de Le Poincaré d'annulation de la cohomologie”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 283 (1976), núm. 6.
- [2] J. Girbau, “Vanishing cohomology theorems and stability of complex analytic foliations”, *Israel J. Math.* 40 (1981), 235-254.
- [3] J. Girbau, A. Haefliger, D. Sundararaman, “On deformations of transversely holomorphic foliations”, *J. Reine Angew. Math.* 345 (1983), 122-147.
- [4] B. Shiffman, A.J. Sommese, “Vanishing theorems on complex manifolds”, *Birkhäuser, Boston*, (1985).
- [5] S. Kobayashi, “Differential geometry of complex vector bundles”, *Princeton University Press, Tokyo*, (1987).
- [6] J. Girbau, M. Nicolau, “On deformations of holomorphic foliations”, *Ann. Inst. Fourier*, 39 (1989), 417-449
- [7] Ll. Bruna, J. Girbau, “Stability by Linearization of Einstein's Field Equation”, *Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser* (2010).
- [8] J. Girbau, “Un curs accelerat d'acceleració còsmica”, *Butlletí de la SCM*, 28 (2013), 147-181.

El professor Joan Girbau

Ferran Montardit

Alumne de Joan Girbau

Tota una generació que vam cursar Matemàtiques a l'Autònoma vam conèixer el professor Girbau a l'assignatura de Geometria Diferencial I de segon curs.

En Girbau, tal com encara el recordem quan ens trobem amb companys de carrera, era un apassionat a l'hora d'explicar. Omplia la pissarra de dibuixos de superfícies corbades i de símbols de Christoffel (eines numèriques necessàries per estudiar distàncies en superfícies no planes)

al mateix temps que s'emocionava parlant de Gauss i del seu teorema egregi (sobre curvatures de superfícies) amb un peculiar timbre de veu i un refinat sentit de l'humor que sovint feia servir a classe i que sempre ens mantenia atents.

Amb ell, una classe magistral era una bona eina d'aprenentatge. I si alguna idea no quedava clara, el seu despatx farcit de pòsters sempre tenia les portes obertes per atendre't, comen-